Baltic Way 2007

Köpenhamn, 3 november 2007

Version: Svenska

Tillåten tid: $4\frac{1}{2}$ timmar.
Endast skriv- och ritmateriel får användas.
Frågor ställes under första halvtimmen.

1. För ett positivt heltal n betraktar vi en uppdelning av mängden $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ i n stycken par $P_1, P_2, \ldots, P_n$. För varje par P_i, låt p_i vara produkten av de två talen i P_i. Bevisa att

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \cdots + \frac{1}{p_n} < 1.$$

2. En följd av heltal a_1, a_2, a_3, ... kallas *exakt* om $a_n^2 - a_m^2 = a_{n-m}a_{n+m}$ för alla $n > m$.

Bevisa att det finns en exakt följd med $a_1 = 1$, $a_2 = 0$, och bestäm a_{2007}.

3. Antag att F, G, H är polynom med reella koefficienter, vars grad ej överstiger $2n + 1$, och sådana att:

(1) För alla reella x har vi att

$$F(x) \leq G(x) \leq H(x).$$

(2) Det finns distinkta reella tal x_1, x_2, ..., x_n sådana att

$$F(x_i) = H(x_i) \qquad \text{för } i = 1, 2, \ldots, n.$$

(3) Det finns ett reellt tal x_0 skilt från x_1, x_2, ..., x_n sådant att

$$F(x_0) + H(x_0) = 2G(x_0).$$

Bevisa att $F(x) + H(x) = 2G(x)$ för alla reella tal x.

4. Låt a_1, a_2, ..., a_n vara positiva reella tal, och låt $S = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. Bevisa att

$$(2S + n)(2S + a_1a_2 + a_2a_3 + \cdots + a_na_1) \geq 9\left(\sqrt{a_1a_2} + \sqrt{a_2a_3} + \cdots + \sqrt{a_na_1}\right)^2.$$

5. En funktion f är definierad för alla reella tal utom 0, och antar alla reella värden förutom 1. Det är också känt att

$$f(xy) = f(x)f(-y) - f(x) + f(y)$$

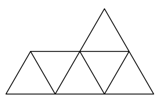
för alla $x, y \neq 0$, och att

$$f(f(x)) = \frac{1}{f(\frac{1}{x})}$$

för alla $x \notin \{0, 1\}$. Bestäm alla sådana funktioner f.

6. Fredde skriver ned talen $1, 2, \ldots, n$ i någon ordning på en tavla. Han gör sedan en lista över alla par (i, j) sådana att $1 \leq i < j \leq n$ och talet på plats i på tavlan är större än talet på plats j. Fredde upprepar nu följande procedur så länge det går: Han väljer ett par (i, j) från listan, byter plats på det i:te och j:te talet på tavlan, och raderar därefter (i, j) från listan. Bevisa att Fredde kan välja paren i en sådan ordning att talen på tavlan står i växande ordning när han är klar.

7. En *krumelur* är sammansatt av sex liksidiga trianglar med sidlängd 1, på det sätt som visas i figuren nedan. Bestäm alla möjliga heltal n sådana att en liksidig triangel med sidan n kan byggas av krumelurer (vridningar och speglingar av krumelurer är tillåtna; överlappningar är det inte).



8. Kalla en mängd A av heltal *icke-isolerad* om för varje $a \in A$ åtminstone ett av talen $a-1$ och $a+1$ också tillhör A. Bevisa att antalet icke-isolerade delmängder av $\{1, 2, \ldots, n\}$ med fem element är $(n-4)^2$.

9. En förening skall välja en styrelse. Varje medlem av föreningen har valt tio kandidater till styrelsen, men blir glad om åtminstone en av dessa kommer med. Givet sex medlemmar av föreningen så finns det alltid två styrelsekandidater som skulle göra samtliga sex glada. Visa att en styrelse bestående av tio personer kan utses, så att alla i föreningen blir glada.

10. Givet är ett rutnät, vars 18×18 rutor kan vara antingen svarta eller vita. Ursprungligen är alla rutorna vita. Vi kan utföra följande operation: Välj en kolumn eller rad och byt färg på alla rutorna i denna. Är det möjligt att upprepa denna operation så att vi får ett rutnät med exakt 16 svarta rutor?

11. Låt AD, BE och CF vara höjderna i triangeln ABC. Låt punkterna P, Q, R och S uppfylla följande krav:

(1) P är centrum för den omskrivna cirkeln till triangeln ABC.

(2) Sträckorna PQ, QR och RS är lika långa som denna cirkels radie.

(3) Den riktade sträckan PQ har samma riktning som den riktade sträckan AD. På samma sätt har QR samma riktning som BE, och RS samma riktning som CF.

Bevisa att S är centrum för den inskrivna cirkeln till triangeln ABC.

12. Låt M vara en punkt på den båge $\overset{\frown}{AB}$ av den omskrivna cirkeln till triangeln ABC som inte innehåller C. Antag att projektionerna av M på linjerna AB och BC ligger på själva triangelsidorna, och inte på deras förlängningar. Beteckna dessa projektioner X respektive Y. Låt K och N vara mittpunkterna på AC respektive XY. Bevisa att $\angle MNK = 90°$.

13. Låt $t_1, t_2, \ldots, t_k$ vara k olika räta linjer i rummet, där $k > 1$. Bevisa att det existerar punkter P_i på t_i, $i = 1, \ldots, k$, sådana att P_{i+1} är projektionen av P_i på t_{i+1} för $i = 1, \ldots, k-1$, och P_1 är projektionen av P_k på t_1.

14. I en konvex fyrhörning $ABCD$ gäller att $\angle ADC = 90°$. Låt E och F vara projektionerna av B på linjerna AD respektive AC. Antag att F ligger mellan A och C, att A ligger mellan D och E, och att linjen EF går genom mittpunkten på sträckan BD. Bevisa att fyrhörningen $ABCD$ kan skrivas in i en cirkel.

15. Den inskrivna cirkeln till triangeln ABC tangerar sidan AC i punkten D. En annan cirkel går genom D och tangerar strålarna BC och BA, varav den senare i punkten A. Bestäm förhållandet $|AD|/|DC|$.

16. Låt a och b vara rationella tal sådana att $s = a + b = a^2 + b^2$. Bevisa att s kan skrivas som ett bråk vars nämnare är relativt prima med 6.

17. Låt x, y, z vara positiva heltal sådana att $\frac{x+1}{y} + \frac{y+1}{z} + \frac{z+1}{x}$ är ett heltal. Låt d vara den största gemensamma delaren till x, y och z. Bevisa att $d \leq \sqrt[3]{xy + yz + zx}$.

18. Låt a, b, c, d vara heltal skilda från noll, sådana att den enda kvadrupel (x, y, z, t) av heltal som uppfyller ekvationen

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2 = 0$$

är $x = y = z = t = 0$. Följer det att talen a, b, c, d har samma tecken?

19. Låt r och k vara positiva heltal sådana att alla primtalsdelare till r är större än 50.

Ett positivt heltal som står utskrivet i basen 10 (utan inledande nollor) och har minst k siffror, kallas *hyvens* om varje sekvens av k konsekutiva siffror bildar ett tal (möjligen med inledande nollor) som är en multipel av r.

Visa att om det finns oändligt många hyvens tal, så är talet $10^k - 1$ också hyvens.

20. Låt a och b vara positiva heltal, sådana att $b < a$ och $a^3 + b^3 + ab$ är delbart med $ab(a - b)$. Bevisa att ab är kuben av ett heltal.