Baltic Way 2007

Copenhagen, November 3, 2007

Длительность олимпиады 4,5 часа.
Вопросы по условиям принимаются в письменном виде первые 30 минут.
Записывать решения можно только разрешенными средствами.

1. Пусть числа 1, 2, 3, …, $2n$ разбиты на n пар P_1, P_2, … P_n. Обозначим через p_i произведение чисел в паре P_i. Докажите, что
$$\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\ldots+\frac{1}{p_n}<1.$$

2. Последовательность целых чисел a_1, a_2, a_3, … называется *точной*, если для любых $n>m$
$$a_n^2-a_m^2=a_{n-m}a_{n+m}.$$
Докажите, что существует точная последовательность, в которой $a_1=1$, $a_2=0$, и найдите a_{2007}.

3. Пусть F, G, H — многочлены с вещественными коэффициентами, степени которых не превосходят $2n+1$. Предположим, что

   (1) $F(x)\leqslant G(x)\leqslant H(x)$ для всех вещественных x.

   (2) Существуют различные вещественные числа x_1, x_2, …, x_n, для которых $F(x_i)=H(x_i)$.

   (3) Существует вещественное x_0, отличное от x_1, x_2, …, x_n, для которого $F(x_0)+H(x_0)=2G(x_0)$.

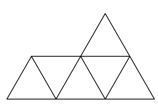
   Докажите, что $F(x)+H(x)=2G(x)$ при всех вещественных x.

4. Пусть a_1, a_2, …, a_n — положительные числа, $S=a_1+a_2+\ldots+a_n$. Докажите, что
$$(2S+n)(2S+a_1a_2+a_2a_3+\ldots+a_na_1)\geqslant 9\left(\sqrt{a_1a_2}+\sqrt{a_2a_3}+\ldots+\sqrt{a_na_1}\right)^2.$$

5. Функция f задана на множестве $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ и принимает значения в множестве $\mathbb{R}\setminus\{1\}$, причем каждое вещественное число, кроме 1, входит в множество значений этой функции. Кроме того,
$$f(xy)=f(x)f(-y)-f(x)+f(y)$$
при любых $x,y\neq 0$, и
$$f(f(x))=\frac{1}{f(\frac{1}{x})}$$
при любом $x\notin\{0,1\}$. Найдите все такие функции f.

6. Фред выписал в строку числа 1, 2, …, n в некотором порядке. Затем он составил список всех пар (i,j), $1\leqslant i<j\leqslant n$, для которых число, стоящее в этой строке на i-м месте, больше числа, стоящего на j-м месте. После этого Фред повторяет следующую операцию: он выбирает из списка пару (i,j), меняет местами числа, стоящие в строке на i-м и j-м местах, после чего вычеркивает пару (i,j) из списка. Процесс заканчивается, когда в списке не останется ни одной пары. Докажите, что Фред может выбирать пары в таком порядке, чтобы в итоге числа в строке оказались расположенными в порядке возрастания.

7. Фигура “сфинкс” состоит из 6 правильных треугольников со стороной 1 (см. рис). При каких n правильный треугольник со стороной n можно разрезать на сфинксы? (Фигурки можно поворачивать и переворачивать.)



8. Множество A целых чисел называется *сплоченным*, если для любого $a \in A$ хотя бы одно из чисел $a-1$ и $a+1$ также принадлежит A. Докажите, что количество пятиэлеметных сплоченных подмножеств множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ равно $(n-4)^2$.

9. Жители города должны выбрать парламент. Каждый горожанин предложил 10 кандидатов, и будет счастлив, если хотя бы один из его кандидатов попадет в парламент. Для любых 6 жителей можно так подобрать парламент всего из двух человек, что эти 6 жителей будут счастливы. Докажите, что можно подобрать парламент из 10 человек так, что вообще все горожане будут счастливы.

10. Каждая клетка доски 18×18 может быть покрашена в черный или белый цвет. Изначально все клетки белые. Разрешается перекрашивать все клетки какой-нибудь строчки или какого-нибудь столбца в противоположный цвет. Можно ли получить раскраску, содержащую ровно 16 черных клеток?

11. AD, BE, CF — высоты треугольника ABC. Пусть ломаная $PQRS$ такова, что:

    (i) точка P — центр описанной окружности треугольника ABC;

    (ii) длины отрезков PQ, QR и RS равны радиусу описанной окружности треугольника ABC;

    (iii) направление вектора $\overrightarrow{PQ}$ совпадает с направлением вектора $\overrightarrow{AD}$; направление вектора $\overrightarrow{QR}$ совпадает с направлением $\overrightarrow{BE}$; и, наконец, направление вектора $\overrightarrow{RS}$ совпадает с направлением $\overrightarrow{CF}$.

    Докажите, что S — центр вписанной окружности треугольника ABC.

12. Точка M лежит на дуге AB описанной окружности треугольника ABC, не содержащей точку C. Из точки M опущены перпендикуляры MX и MY на прямые AB и BC соответственно, причем точки X и Y лежат на сторонах AB и BC, а не на их продолжениях. Пусть K и N — середины отрезков AC и XY соответственно. Докажите, что $\angle MNK = 90^\circ$.

13. В пространстве даны различные прямые t_1, t_2, ..., t_k $(k > 1)$. Докажите, что на них можно выбрать точки P_1, P_2, ..., P_k соответственно так, что проекция точки P_i на прямую t_{i+1} совпадает с точкой P_{i+1} $(i = 1, 2, \ldots, k-1)$, и проекция P_k на t_1 совпадает с точкой P_1.

14. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ $\angle ADC = 90^\circ$. Точки E и F — основания перпендикуляров из точки B на прямые AD и AC. При этом F лежит между A и C, а A лежит между D и E. Известно, что прямая EF проходит через середину отрезка BD. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ — вписанный.

15. Вписанная окружность касается стороны AC треугольника ABC в точке D. Вторая окружность проходит через точку D, касается луча BA в точке A и, кроме того, касается луча BC. Найдите отношение AD/DC.

16. Пусть s, a и b — рациональные числа, $s = a + b = a^2 + b^2$. Докажите, что число s можно записать в виде дроби, знаменатель которой взаимно прост с числом 6.

17. Даны натуральные числа x, y и z, для которых число $\dfrac{x+1}{y} + \dfrac{y+1}{z} + \dfrac{z+1}{x}$ — целое. Пусть d — наибольший общий делитель x, y, z. Докажите, что $d \leqslant \sqrt[3]{xy + yz + xz}$.

18. Пусть a, b, c, d — ненулевые целые числа. Известно, что уравнение $ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2 = 0$ имеет только одно решение в целых числах: $x = y = z = t = 0$. Следует ли отсюда, что числа a, b, c, d одного знака?

19. Даны натуральные числа r и k, причем все простые делители числа r больше 50.

    Натуральное число называется *приятным*, если его десятичная запись содержит не менее k цифр и при этом любые k подряд идущих цифр образуют число (возможно, начинающееся с нулей), кратное r.

    Докажите, что если при данных r и k существует бесконечно много приятных чисел, то число $10^k - 1$ — тоже приятное.

20. Пусть a и b — натуральные числа $(b < a)$, для которых число $a^3 + b^3 + ab$ делится на $ab(a-b)$. Докажите, что число ab — точный куб.