Baltic Way 2007

Kopenhaga, 3 listopada 2007

Version: Polish

Czas na rozwiązywanie: 4½ godziny.
Pytania można zadawać w ciągu początkowych 30 minut.
Dozwolone są tylko przybory do pisania i rysowania.

1. Dla dodatniej liczby całkowitej n rozważmy rozbicie zbioru $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ na n podzbiorów dwuelementowych $P_1, P_2, \ldots, P_n$. W każdym zbiorze P_i niech p_i będzie iloczynem obu elementów zbioru P_i. Udowodnić, że

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \cdots + \frac{1}{p_n} < 1.$$

2. Ciąg liczb całkowitych a_1, a_2, a_3, … nazwiemy *dokładnym*, jeżeli $a_n^2 - a_m^2 = a_{n-m}a_{n+m}$ dla $n > m$. Wykazać, że istnieje ciąg dokładny, w którym $a_1 = 1$, $a_2 = 0$, i wyznaczyć a_{2007}.

3. Niech F, G, H będą takimi wielomianami stopnia co najwyżej $2n + 1$ o współczynnikach rzeczywistych, że:

(1) Dla wszystkich liczb rzeczywistych x mamy

$$F(x) \leq G(x) \leq H(x).$$

(2) Istnieją takie różne liczby rzeczywiste x_1, x_2, …, x_n, że

$$F(x_i) = H(x_i) \qquad \text{dla } i = 1, 2, \ldots, n.$$

(3) Istnieje liczba rzeczywista x_0 różna od x_1, x_2, …, x_n, dla której

$$F(x_0) + H(x_0) = 2G(x_0).$$

Dowieść, że $F(x) + H(x) = 2G(x)$ dla wszystkich liczb rzeczywistych x.

4. Niech a_1, a_2, …, a_n będą dodatnimi liczbami rzeczywistymi, i niech $S = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. Udowodnić, że

$$(2S+n)(2S + a_1a_2 + a_2a_3 + \cdots + a_na_1) \geq 9\left(\sqrt{a_1a_2} + \sqrt{a_2a_3} + \cdots + \sqrt{a_na_1}\right)^2.$$

5. Funkcja f, określona na zbiorze wszystkich liczb rzeczywistych różnych od 0, przyjmuje wszystkie wartości rzeczywiste różne od 1. Ponadto

$$f(xy) = f(x)f(-y) - f(x) + f(y)$$

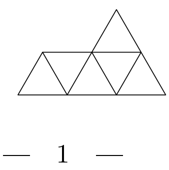
dla dowolnych $x, y \neq 0$, oraz

$$f(f(x)) = \frac{1}{f(\frac{1}{x})}$$

dla każdego $x \notin \{0, 1\}$. Wyznaczyć wszystkie takie funkcje f.

6. Fredek pisze liczby $1, 2, \ldots, n$ w pewnej kolejności, po czym sporządza listę wszystkich takich par (i, j), że $1 \leq i < j \leq n$ oraz i-ta liczba jest większa od j-tej liczby w jego permutacji. Następnie Fredek wielokrotnie wykonuje następującą operację, dopóki jest możliwa: wybiera parę (i, j) z bieżącej listy, zamienia miejscami liczbę i-tą z liczbą j-tą w bieżącej permutacji, i usuwa parę (i, j) z listy. Wykazać, że Fredek może wybierać pary w takiej kolejności, że po zakończeniu procesu liczby w permutacji będą uporządkowane rosnąco.

7. *Potworek* składa się z sześciu trójkątów równobocznych o boku 1, jak pokazuje rysunek. Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite n, dla których trójkąt równoboczny o boku n można podzielić na potworki (obroty i odbicia potworków są dopuszczalne; potworki nie mogą na siebie zachodzić).



8. Nazwijmy zbiór A liczb całkowitych *nieizolowanym*, jeżeli dla każdego $a \in A$ przynajmniej jedna z liczb $a-1$, $a+1$ także należy do A. Udowodnić, że liczba pięcioelementowych nieizolowanych podzbiorów zbioru $\{1,2,\ldots,n\}$ wynosi $(n-4)^2$.

9. W pewnym stowarzyszeniu należy wybrać zarząd. Każdy członek wskazał 10 kandydatów do zarządu, ale będzie zadowolony, jeżeli przynajmniej jeden z nich znajdzie się w zarządzie. Dla dowolnych sześciu członków stowarzyszenia można utworzyć dwuosobowy zarząd, zadowalający wszystkich sześciu. Dowieść, że można wybrać 10-osobowy zarząd, zadowalający wszystkich członków stowarzyszenia.

10. Dana jest tablica 18×18, której każde pole może być białe albo czarne. Początkowo wszystkie pola są białe. Możemy wykonywać następującą operację: wybieramy kolumnę albo wiersz i zmieniamy kolory wszystkich pól w tej kolumnie albo wierszu. Czy wykonując wielokrotnie taką operację możemy otrzymać tablicę, w której będzie dokładnie 16 czarnych pól?

11. W trójkącie ABC odcinki AD, BE i CF są wysokościami. Punkty P, Q, R i S spełniają następujące warunki:

(1) P jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC.

(2) Długości odcinków PQ, QR i RS są równe promieniowi okręgu opisanego na trójkącie ABC.

(3) Odcinek zorientowany PQ ma ten sam kierunek i zwrot, co odcinek zorientowany AD. Podobnie, odcinek QR ma ten sam kierunek i zwrot, co BE, zaś odcinek RS ma ten sam kierunek i zwrot, co CF.

Wykazać, że punkt S jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC.

12. Punkt M leży na tym łuku $\widehat{AB}$ okręgu opisanego na trójkącie ABC, który nie zawiera punktu C. Załóżmy, że rzuty prostokątne punktu M na proste AB i BC leżą na samych bokach, a nie na ich przedłużeniach. Oznaczmy te rzuty odpowiednio przez X i Y. Niech K i N będą odpowiednio środkami odcinków AC i XY. Dowieść, że $\angle MNK = 90°$.

13. Niech $t_1, t_2, \ldots, t_k$ będą różnymi prostymi w przestrzeni ($k > 1$). Udowodnić, że istnieją takie punkty P_i na t_i ($i = 1, \ldots, k$), że P_{i+1} jest rzutem prostokątnym P_i na prostą t_{i+1} dla $i = 1, \ldots, k-1$, a P_1 jest rzutem prostokątnym P_k na prostą t_1.

14. W czworokącie wypukłym $ABCD$ zachodzi równość $\angle ADC = 90°$. Punkty E i F są rzutami prostokątnymi punktu B odpowiednio na proste AD i AC. Załóżmy, że punkt F leży między A i C, punkt A leży między D i E, zaś prosta EF przechodzi przez środek odcinka BD. Dowieść, że na czworokącie $ABCD$ można opisać okrąg.

15. Okrąg wpisany w trójkąt ABC jest styczny do boku AC w punkcie D. Inny okrąg przechodzi przez punkt D i jest styczny do półprostych BC i BA – do drugiej z nich w punkcie A. Obliczyć stosunek AD/DC.

16. Niech a i b będą takimi liczbami wymiernymi, że $s = a + b = a^2 + b^2$. Wykazać, że liczbę s można zapisać w postaci ułamka, którego mianownik jest względnie pierwszy z liczbą 6.

17. Niech x, y, z będą takimi dodatnimi liczbami całkowitymi, że liczba $\frac{x+1}{y} + \frac{y+1}{z} + \frac{z+1}{x}$ jest całkowita. Niech d oznacza największy wspólny dzielnik liczb x, y oraz z. Udowodnić, że $d \le \sqrt[3]{xy + yz + zx}$.

18. Niech a, b, c, d będą takimi liczbami całkowitymi różnymi od zera, że jedyną czwórką liczb całkowitych (x, y, z, t) spełniającą równanie

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2 = 0$$

jest $x = y = z = t = 0$. Czy wynika stąd, że liczby a, b, c, d mają jednakowy znak?

19. Dane są dodatnie liczby całkowite r i k. Wszystkie dzielniki pierwsze liczby r są większe od 50.

Dodatnią liczbę całkowitą, której zapis dziesiętny (bez zer początkowych) ma co najmniej k cyfr, nazwiemy *ładną*, jeżeli każdy ciąg k kolejnych cyfr tego zapisu przedstawia liczbę (być może z zerami początkowymi) podzielną przez r.

Dowieść, że jeśli istnieje nieskończenie wiele liczb ładnych, to liczba $10^k - 1$ też jest ładna.

20. Niech a i b będą takimi dodatnimi liczbami całkowitymi, że $b < a$ oraz liczba $a^3 + b^3 + ab$ jest podzielna przez $ab(a-b)$. Udowodnić, że ab jest sześcianem liczby całkowitej.