Baltic Way 2007

Kjøbenhavn, 3. november 2007

Version: Norwegian

Tid til disposisjon: 4 ½ timer.
Spørsmål kan stilles de første 30 minuttene.
Tillatte hjelpemidler: passer og linjal.

1. For et positivt heltall n, betrakt en vilkårlig partisjon av mengden $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ i n delmengder $P_1, P_2, \ldots, P_n$ med to elementer hver. For hver $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, la p_i være produktet av de to tallene i P_i. Vis at

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \cdots + \frac{1}{p_n} < 1.$$

2. En følge av heltall $a_1, a_2, a_3, \ldots$ kalles *eksakt* hvis $a_n^2 - a_m^2 = a_{n-m}a_{n+m}$ for alle $n > m$.
Vis at det eksisterer en eksakt følge med $a_1 = 1$, $a_2 = 0$ og beregn a_{2007}.

3. Anta at F, G, H er polynomer av grad høyst $2n + 1$ med reelle koeffisienter slik at

(1) vi for alle reelle x har

$$F(x) \le G(x) \le H(x).$$

(2) det finnes forskjellige reelle tall $x_1, x_2, \ldots, x_n$ slik at

$$F(x_i) = H(x_i) \qquad \text{for } i = 1, 2, \ldots, n.$$

(3) det finnes et reelt tall x_0 forskjellig fra $x_1, x_2, \ldots, x_n$ slik at

$$F(x_0) + H(x_0) = 2G(x_0).$$

Vis at $F(x) + H(x) = 2G(x)$ for alle reelle tall x.

4. La $a_1, a_2, \ldots, a_n$ være positive reelle tall, og la $S = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. Vis at

$$(2S + n)(2S + a_1a_2 + a_2a_3 + \cdots + a_na_1) \ge 9\Big(\sqrt{a_1a_2} + \sqrt{a_2a_3} + \cdots + \sqrt{a_na_1}\Big)^2.$$

5. En funksjon f er definert over mengden av relle tall unntatt 0, og antar alle reelle verdier forskjellige fra 1. Vi vet også at

$$f(xy) = f(x)f(-y) - f(x) + f(y)$$

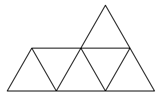
for alle $x, y \neq 0$, og at

$$f(f(x)) = \frac{1}{f(\frac{1}{x})}$$

for alle $x \notin \{0, 1\}$. Bestem alle slike funksjoner f.

6. Nils skriver ned tallene $1, 2, \ldots, n$ i en viss rekkefølge. Han lager deretter en liste over alle par (i, j) slik at $1 \le i < j \le n$ og det i-te tallet er større enn det j-te tallet i permutasjonen hans. Så gjentar Nils følgende trekk så lenge det er mulig: velg et par (i, j) fra listen, bytt det i-te tallet med det j-te tallet, og slett (i, j) fra listen. Vis at Nils kan velge parene i en slik rekkefølge at han etter det siste trekket ender opp med alle tallene i stigende rekkefølge.

7. En *skvalg* består av seks regulære trekanter med sidelengde 1 som vist på figuren nedenfor (rotasjoner og speilinger av figuren er tillatt). Bestem alle mulige heltall n slik at en regulær trekant med sidelengde n kan deles opp i skvalger.



8. La en mengde A av heltall kalles *ikke-isolert* hvis det for enhver $a \in A$ gjelder at mist ett av tallene $a - 1$ og $a + 1$ også er i A. Vis at antall ikke-isolerte delmengder av $\{1, 2, \dots, n\}$ med fem elementer er $(n - 4)^2$.

9. Et akademi skal velge et styre. Hvert medlem har nominert ti kandidater til styret, men er fornøyd hvis minst en av dem velges inn. For hver gruppe av seks medlemmer finnes det en styresammensetning med to medlemmer slik at alle i gruppen blir fornøyde. Vis at det da kan settes sammen et styre med 10 medlemmer slik at alle akademiets medlemmer blir fornøyde.

10. Vi har et 18×18 brett. Alle feltene kan farges enten hvite eller sorte. Til å begynne med er alle feltene hvite. Vi kan utføre følgende operasjon: velg en rekke eller en rad, og skift farge på alle feltene i denne rekken eller raden. Er det mulig ved gjentatte operasjoner å ende opp med nøyaktig 16 sorte felt?

11. La AD, BE og CF være høydene i trekanten ABC. La videre punktene P, Q, R og S tilfredsstille følgende:

(1) P er omsenteret til trekanten ABC.

(2) Linjestykkene PQ, QR og RS har lengde lik omradien til trekanten ABC.

(3) Det orienterte linjestykket PQ har den samme retningen som det orienterte linjestykket AD. Tilsvarende har QR har den samme retningen som BE og RS den samme retningen som CF.

Vis at S er innsenteret til trekanten ABC.

12. La M være et punkt på den buen $\overset{\frown}{AB}$ til trekanten ABCs omskrevne sirkel som ikke inneholder C. Anta at projeksjonene av M på linjene AB og BC ligger på selve sidene. Betegn disse projeksjonene henholdsvis X og Y. La K og N være midtpunktene til henholdsvis AC og XY. Vis at $\angle MNK = 90°$.

13. La $t_1, t_2, \dots, t_k$ være forskjellige rette linjer i rommet ($k > 1$). Vis at det finnes punkter P_i på t_i, $i = 1, \dots, k$, slik at P_{i+1} er projeksjonen av P_i på t_{i+1} for $i = 1, \dots, k - 1$, og P_1 er projeksjonen av P_k på t_1.

14. I en konveks firkant $ABCD$ har vi $\angle ADC = 90°$. La E og F være projeksjonene av B på henholdsvis linjene AD og AC. Anta at F ligger mellom A og C, at A ligger mellom D og E, og at linjen EF går gjennom midtpunktet til linjestykket BD. Vis at firkanten $ABCD$ er syklisk.

15. Innsirkelen til trekanten ABC tangerer siden AC i D. En annen sirkel går gjennom D og tangerer strålene BC og BA, den siste i A. Bestem forholdet AD/DC.

16. La a og b være rasjonale tall slik at $s = a + b = a^2 + b^2$. Vis at s kan skrives som en brøk der nevneren er relativt primsk med 6.

17. La x, y, z være positive heltall slik at $\frac{x+1}{y} + \frac{y+1}{z} + \frac{z+1}{x}$ blir et heltall. La videre d være den største felles divisoren til x, y og z. Vis at $d \leq \sqrt[3]{xy + yz + zx}$.

18. La a, b, c, d være heltall forskjellige fra 0, slik at den eneste kvadruppelen (x, y, z, t) av heltall som tilfredsstiller

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2 = 0$$

er $x = y = z = t = 0$. Følger det at tallene a, b, c, d har samme fortegn?

19. La r og k være positive heltall slik at alle primdivisorene til r er større enn 50.

Et positivt heltall med minst k siffre i desimalform (uten ledende nuller) kalles *flott* hvis ethvert følge av k påfølgende siffre i dens desimalform danner et tall (eventuelt med ledende nuller) som er delelig med r.

Vis at dersom det finnes uendelig mange flotte tall, må tallet $10^k - 1$ også være flott.

20. La $a < b$ være positive heltall slik at $a^3 + b^3 + ab$ er delelig med $ab(a - b)$. Vis at ab er en perfekt kube.