Lithuanian version

Tarptautinė komandinė Baltijos kelio olimpiada 2007

Copenhaga, 2007 11 03

Olimpiados trukmė 4,5 valandos

Klausimai raštu dėl sąlygų priimami per pirmąsias 30 minučių. Galima naudotis tik rašymo priemones.

1. Skaičiai $\{1,2,3,.....,2n\}$ suskaidyti į n porų $P_1, P_2 .....P_n$. Simboliu p_i pažymėkime poros P_i skaičių sandaugą. Įrodykite, kad $\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+...+\frac{1}{p_n}<1$.

2. Sveikųjų skaičių seką $a_1, a_2, a_3,.....$ vadinkime tikslia, jei su visais n > m galioja lygybė $a_n^2 - a_m^2 = a_{n-m}\cdot a_{n+m}$. Įrodykite, kad egzistuoja tiksli seka, kurioje a_1=1, $a_2 = 0$ ir raskite a_{2007}.

3. F, G, H yra ne didesnio kaip 2n+1 laipsnio daugianariai su realiaisiais koeficientais, tenkinantys sąlygas:

   a) Su visais realiaisiais skaičiais x $F(x) \le G(x) \le H(x)$

   b) Egzistuoja skirtingi realieji skaičiai $x_1, x_2,......, x_n$ tokie, kad $F(x_i) = H(x_i)$ su visais i = 1, 2, ….,n.

   c) Egzistuoja toks realusis skaičius x_0, nesutampantis nei su vienu iš skaičių $x_1, x_2,......, x_n$, kad $F(x_0) + H(x_0) = 2G(x_0)$.

Įrodykite, kad su kiekvienu realiuoju skaičiumi x F(x) + H(x) = 2G(x).

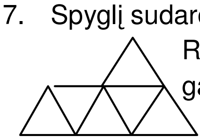
4. Teigiamų realiųjų skaičių $a_1, a_2,..., a_n$ sumą pažymėkime S Įrodykite, kad

$$(2S+n)(2S+a_1\cdot a_2+a_2\cdot a_3+...........+a_n\cdot a_1)\ge 9\left(\sqrt{a_1\cdot a_2}+\sqrt{a_2\cdot a_3}+......+\sqrt{a_n\cdot a_1}\right)^2.$$

5. Funkcija f(x) yra apibrėžta visų realiųjų skaičių, nelygių nuliui, aibėje ir įgyja visas realiąsias reikšmes, išskyrus 1. Yra žinoma, kad su visais realiaisiais x, y $\neq$ 0, galioja lygybė f (xy) =f(x)f(-y) – f(x) +f(y) ir kad $f(f(x))=\frac{1}{f\left(\frac{1}{x}\right)}$ su kiekvienu x $\neq$ 0, 1. Raskite visas tokias funkcijas.

6. Fredis eilute bet kaip surašė skaičius 1, 2,….., n. Tada jis sudarė sąrašą visų tokių porų (i, j), $1 \le i < j \le n$, kurioms skaičius, esantis i – toje tos eilutės vietoje, didesnis už skaičių, esantį j – toje vietoje. Dabar Fredis kartoja tokią operaciją: jis pasirenka iš sąrašo porą (i, j), sukeičia vietomis skaičius, esančius eilutėje i – toje ir j – toje vietose, o tada išbraukia porą (i, j) iš sąrašo. Operacijos kartojimas baigiasi, kai sąraše nebelieka nė vienos poros. Įrodykite, kad Fredis gali pasirinkinėti poras taip, kad skaičiai eilutėje būtų išrikiuoti didėjimo tvarka.

7. Spyglį sudaro 6 lygiakraščiai trikampiai su kraštinėmis, kurių ilgiai lygūs 1, taip, kaip parodyta piešinyje.



Raskite visus tokius teigiamus sveikuosius skaičius n, kad lygiakraštį trikampį su kraštine n galima sudėti iš spyglių. Spyglius galima sukioti ir vartyti, tačiau jie negali persidengti.

8. Aibę A vadinkime neizoliuota, jeigu kiekvienam jos elementui a bent vienas iš skaičių a – 1 ir a +1 irgi priklauso aibei A. Įrodykite, kad skirtingų aibės $\{1,2,.....,n\}$ neizoliuotų 5 – elemenčių poaibių skaičius yra $(n-4)^2$.

9. Akcininkai renka bendrovės tarybą. Kiekvienas akcininkas pasirenka 10 kandidatų į valdytojus, bet jis būtų laimingas, jeigu bent vienas iš jo pasirinktųjų patektų į tarybą. Bet kuriems 6 akcininkams galima sudaryti 2 valdytotojų tarybą taip, kad visi tie 6 akcininkai būtų laimingi. Įrodykite, kad galima sudaryti tokią 10 valdytojų tarybą, kad kiekvienas akcininkas būtų laimingas.

10. Kiekvienas lentelės 18×18 langelis gali būti nudažytas arba baltai arba juodai. Pradžioje visi lentelės langeliai yra nudažyti baltai. Lentelėje leidžiama atlikti tokią operaciją: pasirinkti bet kurią eilutę arba stulpelį ir perdažyti visus pasirinktosios eilutės ar stulpelio langelius : juodus baltai, o baltus - juodai. Ar galima, kartojant nurodytą operaciją, gauti tokią lentelę, kurioje būtų lygiai 16 juodai nudažytų langelių?

11. AD, BE ir CF yra trikampio ABC aukštinės. Taškai P, Q, R ir S yra parinkti taip, kad :
    1) P yra apie trikampį ABC apibrėžto apskritimo centras.
    2) Atkarpų PQ, QR ir RS ilgiai yra lygūs apie trikampį ABC apibrėžto apskritimo spinduliui.
    3) Kryptinė atkarpa PQ yra tos pačios krypties kaip AD, atkarpa QR yra tos pačios krypties kaip BE ir RS yra tos pačios krypties kaip CF.

Įrodykite, kad taškas S sutampa su į trikampį ABC įbrėžto apskritimo centru.

12. Taškas M yra apie trikampį ABC apibrėžto apskritimo lanko AB, kuriam nepriklauso C, taškas. Taško M projekcijos tiesėse AB ir BC priklauso atkarpoms AB ir BC ir yra atitinkamai taškai X ir Y. Taškai K ir N yra atkarpų AC ir XY vidurio taškai.Įrodykite, kad $\angle MNK = 90^0$

13. $t_1, t_2, ...t_k$ yra skirtingos erdvės tiesės, o k > 1. Įrodykite, kad tiesėse t_i galima parinkti taškus P_i, $t = 1,2,...,k$, kad P_{i+1} yra P_i projekcija tiesėje t_{i+1}, $i = 1,2,...,k-1$ ir P_1 yra taško P_k projekcija tiesėje t_1.

14. Iškilojo keturkampio ABCD kampas $\angle ADC = 90^0$, o taškai E ir F yra taško B projekcijos atitinkamai tiesėse AD ir AC. Sakykime, kad taškas F yra tarp taškų A ir C, taškas A yra tarp D ir E ir kad tiesė EF eina per atkarpos BD vidurio tašką. Įrodykite, kad apie keturkampį ABCD galima apibrėžti apskritimą.

15. Į trikampį ABC įbrėžtas apskritimas liečia kraštinę AC taške D. Kitas apskritimas nubrėžtas per tašką D, liečia spindulį BA taške A ir, be to, liečia spindulį BC. Raskite santykį AD / DC.

16. s, a ir b racionalieji skaičiai tokie, kad s = a + b = $a^2 + b^2$. Įrodykite, kad skaičių s galima užrašyti trupmena, kurios vardiklis neturi bendrų daliklių su skaičiumi 6.

17. x, y ir z yra teigiami sveikieji skaičiai tokie, kad $\frac{x+1}{y} + \frac{y+1}{z} + \frac{z+1}{x}$ yra sveikasis skaičius. Sakykime, kad d yra didžiausias bendras skaičių x, y ir z daliklis. Įrodykite, kad $d \le \sqrt[3]{xy + yz + xz}$.

18. a, b, c ir d yra nenuliniai sveikieji skaičiai tokie, kad vienintelis ketvertas (x, y, z, t) , tenkinantis lygtį $ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2 = 0$ yra ketvertas x = y = z = t = 0. Ar iš to seka, kad visi skaičiai a, b, c ir d yra to paties ženklo?

19. r ir k yra teigiami sveikieji skaičiai, tokie, kad visi jų pirminiai dalikliai yra didesni už 50. Natūralusis skaičius vadinamas maloniu, jeigu jo dešimtainėje išraiškoje yra nemažiau negu k skaitmenų ir bet kurie k iš eilės einančių jo skaitmenų sudaro skaičių (gal būt prasidedantį nuliais), kuris dalijasi iš r. Įrodykite, kad jeigu egzistuoja be galo daug malonių skaičių, tai skaičius $10^k - 1$ yra taip pat malonus skaičius.

20. Skaičiai a ir b yra tokie teigiami sveikieji skaičiai, kad b < a , o $a^3 + b^3 + ab$ dalijasi iš ab(a – b). Įrodykite, kad skaičius $a \cdot b$ yra sveikojo skaičiaus kubas.