**Baltijas ceļš 2007**

**Kopenhāgenā, 2007. gada 3. novembrī**

Version: Latviešu

Jautājumus drīkst uzdot pirmo 30 minūšu laikā.
No palīglīdzekļiem drīkst izmantot tikai rakstāmpiederumus un zīmēšanas piederumus.
Risināšanas laiks: 4 ½ stundas.

**1.** Pieņemsim, ka $n$ ir naturāls skaitlis un kopa $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ ir sadalīta $n$ divu elementu apakškopās $P_1, P_2, \ldots, P_n$. Katrai apakškopai $P_i$ ar $p_i$ apzīmēsim abu tās elementu reizinājumu. Pierādīt, ka

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \cdots + \frac{1}{p_n} < 1.$$

**2.** Veselu skaitļu virkni $a_1$, $a_2$, $a_3$, $\ldots$ sauc par *precīzu*, ja visiem $n > m$ pastāv sakarība $a_n^2 - a_m^2 = a_{n-m}a_{n+m}$.

Pierādīt, ka eksistē precīza virkne, kurai $a_1 = 1$, $a_2 = 0$, un aprēķināt šādai virknei $a_{2007}$.

**3.** Pieņemsim, ka $F$, $G$, $H$ ir polinomi ar reāliem koeficientiem, kuru pakāpes nav lielākas par $2n+1$ un kuriem izpildās nosacījumi:

(1) Visiem reāliem $x$

$$F(x) \leq G(x) \leq H(x).$$

(2) Eksistē tādi dažādi reāli skaitļi $x_1$, $x_2$, $\ldots$, $x_n$, ka

$$F(x_i) = H(x_i) \qquad \text{pie } i = 1, 2, \ldots, n.$$

(3) Eksistē tāds reāls skaitlis $x_0$, kurš atšķiras no visiem $x_1$, $x_2$, $\ldots$, $x_n$, ka

$$F(x_0) + H(x_0) = 2G(x_0).$$

Pierādīt, ka $F(x) + H(x) = 2G(x)$ visiem reāliem skaitļiem $x$.

**4.** Doti pozitīvi reāli skaitļi $a_1$, $a_2$, $\ldots$, $a_n$, un $S = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. Pierādīt, ka

$$(2S+n)(2S + a_1a_2 + a_2a_3 + \cdots + a_na_1) \geq 9\left(\sqrt{a_1a_2} + \sqrt{a_2a_3} + \cdots + \sqrt{a_na_1}\right)^2.$$

**5.** Funkcija $f$ ir definēta visiem reāliem skaitļiem, izņemot 0, un pieņem visas reālas vērtības, izņemot 1. Dots arī, ka visiem $x, y \neq 0$

$$f(xy) = f(x)f(-y) - f(x) + f(y)$$

un visiem $x \notin \{0, 1\}$

$$f(f(x)) = \frac{1}{f(\frac{1}{x})}$$

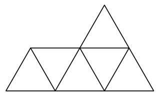
Noskaidrojiet visas šādas funkcijas $f$.

**6.** Fredis uzraksta skaitļus $1, 2, \ldots, n$ kaut kādā secībā. Pēc tam viņš izveido visu tādu pāru $(i, j)$ sarakstu, ka $1 \leq i < j \leq n$ un $i$-tais skaitlis viņa secībā ir lielāks nekā $j$-tais skaitlis viņa secībā. Pēc tam Fredis atkārto sekojošu procedūru, kamēr vien tas iespējams:

- izvēlas pāri $(i, j)$ no saraksta
- samaina secībā vietām $i$-to un $j$-to skaitli
- izsvītro pāri $(i, j)$ no saraksta.

Pierādīt, ka Fredis var izvēlēties pārus tā, ka, procesam beidzoties, skaitļi būs sakārtoti augošā secībā.

**7.** *Sfinksa* sastāv no sešiem regulāriem trijstūriem ar malas garumu 1 (skat. zīmējumu). Noskaidrojiet, kādiem veseliem skaitļiem $n$ regulāru trijstūri ar malas garumu $n$ var pilnīgi pārklāt ar sfinksām (sfinksu pagriešana un spoguļattēlošana ir pieļauta, bet tās nedrīkst ne savstarpēji pārklāties, ne daļēji iziet ārpus trijstūra).



**8.** Veselu skaitļu kopu $A$ sauksim par *neizolētu*, ja katram $a \in A$ vismaz viens no skaitļiem $a-1$ un $a+1$ arī pieder kopai $A$. Pierādīt, ka kopai $\{1, 2, \ldots, n\}$ ir tieši $(n-4)^2$ neizolētas apakškopas, kas katra sastāv no pieciem elementiem.

**9.** Kādai biedrībai jāievēl valde. Katrs biedrības loceklis ir izvirzījis 10 kandidātus, bet viņš būs laimīgs, ja ievēlēs kaut vienu no tiem. Ir zināms, ka katriem sešiem biedrības locekļiem var atrast tādus divus kandidātus, kuru abu ievēlēšana padarīs visus šos sešus locekļus laimīgus. Pierādīt: ir iespējams ievēlēt valdi, kas sastāv no 10 personām, tā, ka visi biedrības locekļi ir laimīgi.

**10.** Dota tabula, kas sastāv no $18 \times 18$ rūtiņām. Katra rūtiņa var būt vai nu balta, vai melna. Sākumā visas rūtiņas ir baltas. Ar vienu gājienu var izvēlēties vai nu vienu rindiņu, vai vienu kolonnu un mainīt tajā visu rūtiņu krāsas. Vai, atkārtojot šādus gājienus, ir iespējams panākt, lai tabulā būtu tieši 16 melnas rūtiņas?

**11.** Trijstūra $ABC$ augstumi ir $AD$, $BE$ un $CF$. Punktiem $P$, $Q$, $R$ un $S$ vienlaicīgi izpildās šādi nosacījumi:

(1) $P$ ir trijstūrim $ABC$ apvilktās riņķa līnijas centrs.

(2) Visu nogriežņu $PQ$, $QR$ un $RS$ garumi ir vienādi ar trijstūrim $ABC$ apvilktās riņķa līnijas rādiusu.

(3) Orientētajam nogrieznim $PQ$ ir tāds pats virziens un vērsums kā orientētajam nogrieznim $AD$. Līdzīgi, $QR$ ir tāds pats virziens un vērsums kā $BE$, un $RS$ - tāds pats virziens un vērsums kā $CF$.

Pierādīt, ka $S$ ir trijstūrī $ABC$ ievilktās riņķa līnijas centrs.

**12.** Uz trijstūrim $ABC$ apvilktās riņķa līnijas loka $\widehat{AB}$, kurš nesatur virsotni $C$, atlikts punkts $M$. Pieņemsim, ka $M$ projekcijas uz taisnēm $AB$ un $BC$ atrodas uz atbilstošajām malām, nevis to pagarinājumiem. Apzīmēsim šīs projekcijas attiecīgi ar $X$ un $Y$. Ar $K$ un $N$ apzīmēsim attiecīgi nogriežņu $AC$ un $XY$ viduspunktus. Pierādīt, ka $\angle MNK = 90°$.

**13.** Telpā dotas $k$ dažādas taisnes $t_1, t_2, \ldots, t_k$, kur $k > 1$. Pierādīt, ka uz katras taisnes $t_i$ var atrast punktu $P_i$, tā, ka $P_{i+1}$ ir punkta $P_i$ projekcija uz taisnes $t_{i+1}$, $i = 1, \ldots, k-1$, un $P_1$ ir punkta $P_k$ projekcija uz taisnes $t_1$.

**14.** Dots, ka izliektā četrstūrī $ABCD$ pastāv vienādība $\angle ADC = 90°$. Punkti $E$ un $F$ ir punkta $B$ projekcijas attiecīgi uz taisnēm $AD$ un $AC$. Pieņemsim, ka $F$ atrodas starp $A$ un $C$, $A$ atrodas starp $D$ un $E$, un taisne $EF$ iet caur nogriežņa $BD$ viduspunktu. Pierādīt, ka ap četrstūri $ABCD$ var apvilkt riņķa līniju.

**15.** Trijstūrī $ABC$ ievilktā riņķa līnija pieskaras malai $AC$ punktā $D$. Cita riņķa līnija iet caur $D$ un pieskaras stariem $BC$ un $BA$, pie tam staram $BA$ - punktā $A$. Aprēķināt attiecību $AD/DC$.

**16.** Dots, ka $a$ un $b$ ir racionāli skaitļi un $s = a + b = a^2 + b^2$. Pierādīt, ka $s$ var izteikt kā daļu, kuras saucējs ir savstarpējs pirmskaitlis ar 6.

**17.** Dots, ka $x$, $y$, $z$ ir naturāli skaitļi un $\frac{x+1}{y} + \frac{y+1}{z} + \frac{z+1}{x}$ ir vesels skaitlis. Ar $d$ apzīmēsim skaitļu $x$, $y$ un $z$ lielāko kopīgo dalītāju. Pierādīt, ka $d \leq \sqrt[3]{xy + yz + zx}$.

**18.** Dots, ka $a$, $b$, $c$, $d$ ir tādi no nulles atšķirīgi veseli skaitļi, ka vienādojuma

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2 = 0$$

vienīgais atrisinājums veselos skaitļos ir $x = y = z = t = 0$. Vai no tā noteikti izriet, ka visiem skaitļiem $a$, $b$, $c$, $d$ ir viena un tā pati zīme?

**19.** Dots, ka $r$ un $k$ ir naturāli skaitļi un visi pirmskaitļi, ar kuriem dalās $r$, ir lielāki par 50.

Naturālu skaitli $n$ sauc par *jauku*, ja tam vienlaicīgi izpildās šādas divas īpašības:

- skaitļa $n$ decimālajā pierakstā ir vismaz $k$ cipari (neieskaitot nulles skaitļa priekšā),
- katri $k$ cipari, kuri skaitļa $n$ decimālajā pierakstā uzrakstīti pēc kārtas (var būt, ka daži pirmie no šiem $k$ cipariem ir nulles), veido tāda skaitļa decimālo pierakstu, kurš dalās ar $r$.

Pierādīt: ja eksistē bezgalīgi daudz jauku skaitļu, tad arī skaitlis $10^k - 1$ ir jauks.

**20.** Dots, ka $a$ un $b$ ir naturāli skaitļi, $b < a$ un $a^3 + b^3 + ab$ dalās ar $ab(a-b)$. Pierādīt, ka $ab$ ir kāda vesela skaitļa kubs.