Eystrasaltskeppnin 2007
Kaupmannahöfn, 3. nóvember 2007

Version: Icelandic

Leyfilegur tími: 4½ klukkustund.
Spurningar eru leyfðar fyrstu 30 mínúturnar.
Leyfileg hjálpartæki eru skriffæri og teikniáhöld.

1. Fyrir jákvæða heiltölu n skoðum við skiptingu mengisins $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ í n tveggja staka hlutmengi $P_1, P_2, \ldots, P_n$. Fyrir hvert hlutmengi P_i, látum við p_i vera margfeldi talnanna tveggja í P_i. Sannið að

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \cdots + \frac{1}{p_n} < 1.$$

2. Runa af heiltölum a_1, a_2, a_3, $\ldots$ er kölluð *nákvæm* ef $a_n^2 - a_m^2 = a_{n-m}a_{n+m}$ fyrir öll $n > m$.

Sannið að til sé nákvæm runa með $a_1 = 1$, $a_2 = 0$, og ákvarðið a_{2007}.

3. Gerum ráð fyrir að F, G og H séu margliður, með rauntölustuðlum, af stigi sem ekki er hærra en $2n + 1$ og eru þannig að eftirfarandi gildi:

(1) Fyrir allar rauntölur x gildir að

$$F(x) \leq G(x) \leq H(x).$$

(2) Til eru ólíkar rauntölur x_1, x_2, $\ldots$, x_n þannig að

$$F(x_i) = H(x_i) \qquad \text{fyrir } i = 1, 2, \ldots, n.$$

(3) Til er rauntala x_0 sem ekki er ein af tölunum x_1, x_2, $\ldots$, x_n þannig að

$$F(x_0) + H(x_0) = 2G(x_0).$$

Sannið að $F(x) + H(x) = 2G(x)$ fyrir allar rauntölur x.

4. Látum a_1, a_2, $\ldots$, a_n vera jákvæðar rauntölur og látum $S = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. Sannið að

$$(2S + n)(2S + a_1a_2 + a_2a_3 + \cdots + a_na_1) \geq 9\left(\sqrt{a_1a_2} + \sqrt{a_2a_3} + \cdots + \sqrt{a_na_1}\right)^2.$$

5. Fall f er skilgreint fyrir allar rauntölur nema 0 og tekur öll rauntölugildi nema 1. Einnig er vitað að

$$f(xy) = f(x)f(-y) - f(x) + f(y)$$

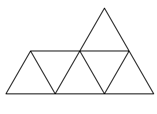
fyrir öll $x, y \neq 0$, og að

$$f(f(x)) = \frac{1}{f(\frac{1}{x})}$$

fyrir öll $x \notin \{0, 1\}$. Ákvarðið öll slík föll f.

6. Friðrik skrifar tölurnar $1, 2, \ldots, n$ í einhverri röð. Síðan býr hann til lista af öllum pörum (i, j) þannig að $1 \leq i < j \leq n$ og þannig að tala númer i er stærri en tala númer j í uppröðun hans. Að því loknu endurtekur Friðrik eftirfarandi aðgerð meðan mögulegt er: Hann velur par (i, j) úr fyrirliggjandi lista, víxlar á tölum númer i og j í núverandi uppröðun og eyðir síðan (i, j) úr listanum. Sannið að Friðrik geti valið pörin í þannig röð að, að aðgerðum loknum, séu tölurnar í uppröðuninni í strangt vaxandi röð.

7. Myndin sýnir púsl samsett úr sex jafnhliða þríhyrningum með hliðarlengdir 1. Ákvarðið allar mögulegar heiltölur n þannig að þekja megi jafnhliða þríhyrning, með hliðarlengd n, að fullu með slíkum púslum (snúningar og speglanir á púslunum eru leyfð, en púslin mega ekki liggja hvert ofan á öðru eða út fyrir stóra þríhyrninginn).



8. Köllum heiltölumengi A *óeinangrað*, ef fyrir sérhvert $a \in A$ er að minnsta kosti önnur talnanna $a-1$ og $a+1$ einnig í A. Sannið að fjöldi fimm staka óeinangraðra hlutmengja í $\{1, 2, \ldots, n\}$ er $(n-4)^2$.

9. Í borg nokkurri þarf að kjósa borgarráð. Sérhver borgarbúi hefur tilnefnt 10 einstaklinga í ráðið, en verður ánægður ef minnst einn þeirra nær kjöri. Fyrir sérhverja sex borgarbúa má finna tvo einstaklinga þannig að, séu þeir í ráðinu, þá verða allir þessir sex borgarbúar ánægðir með borgarráðið. Sannið að hægt sé að velja borgarráð með 10 einstaklingum sem gerir alla borgarbúa ánægða.

10. Okkur er úthlutað 18×18 töflu, þar sem hver reitur getur verið svartur eða hvítur. Í upphafi eru allir reitirnir hvítir. Við megum síðan framkvæma eftirfarandi aðgerð: Veljum annað hvort eina línu eða einn dálk og breytum lit allra reitanna í þeirri línu eða í þeim dálki. Er mögulegt, með því að endurtaka þessa aðgerð, að fá fram töflu með nákvæmlega 16 svörtum reitum?

11. Í þríhyrningi ABC eru AD, BE og CF hæðirnar. Látum punktana P, Q, R og S uppfylla eftirfarandi skilyrði:

(1) P er miðpunktur umritaðs hrings þríhyrningsins ABC.

(2) Öll strikin PQ, QR og RS eru jafnlöng geisla umritaðs hrings þríhyrningsins ABC.

(3) Stefnubundna strikið PQ hefur sömu stefnu og stefnubundna strikið AD. Á sama hátt hefur QR sömu stefnu og BE og RS hefur sömu stefnu og CF.

Sannið að S er miðpunktur innritaðs hrings þríhyrningsins ABC.

12. Látum M vera punkt á boganum $\widehat{AB}$ á umrituðum hring þríhyrningsins ABC sem ekki inniheldur C. Gerum ráð fyrir að ofanvörp punktsins M á línurnar AB og BC liggi á hliðunum sjálfum, en ekki framlengingum þeirra. Táknum þessi ofanvörp með X og Y, í þessari röð. Látum K vera miðpunkt AC og N vera miðpunkt XY. Sannið að $\angle MNK = 90^\circ$.

13. Látum $t_1, t_2, \ldots, t_k$ vera ólíkar beinar línur í þrívíðu rúmi þar sem $k > 1$. Sannið að til séu punktar P_i þannig að P_i liggi á t_i, $i = 1, \ldots, k$ og þannig að P_{i+1} sé ofanvarp P_i á t_{i+1} fyrir $i = 1, \ldots, k-1$ og P_1 sé ofanvarp P_k á t_1.

14. Í kúptum ferhyrningi $ABCD$ höfum við $\angle ADC = 90^\circ$. Látum E og F vera ofanvörp B á línurnar AD og AC, í þessari röð. Gerum ráð fyrir að F liggi milli A og C, að A liggi milli D og E og að línan EF liggi gegnum miðpunkt striksins BD. Sannið að ferhyrningurinn $ABCD$ sé rásaður.

15. Innritaður hringur þríhyrningsins ABC snertir hliðina AC í punktinum D. Annar hringur liggur í gegnum D og snertir hálflínurnar BC og BA, þá seinni í punktinum A. Ákvarðið hlutfallið AD/DC.

16. Látum a og b vera ræðar tölur þannig að $s = a + b = a^2 + b^2$. Sannið að s megi rita sem brot þar sem nefnarinn er ósamþátta 6.

17. Látum x, y og z vera jákvæðar heiltölur þannig að $\frac{x+1}{y} + \frac{y+1}{z} + \frac{z+1}{x}$ sé heiltala. Látum d vera stærsta samdeili x, y og z. Sannið að $d \leq \sqrt[3]{xy + yz + zx}$.

18. Látum a, b, c og d vera heiltölur sem ekki eru núll, þannig að eina fernd heiltalna (x, y, z, t) sem uppfyllir jöfnuna

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2 = 0$$

sé $x = y = z = t = 0$. Er þá nauðsynlegt að tölurnar a, b, c, d hafi allar sama formerki?

19. Látum r og k vera jákvæðar heiltölur þannig að allir frumdeilar r eru stærri en 50.

Jákvæð heiltala sem í tugakerfinu er skrifuð með minnst k tölustöfum (sá fyrsti ekki núll) er kölluð *góð* ef sérhver runa af k tölustöfum í röð í þessari tugakerfisframsetningu myndar tölu (mögulega með núllum fremst) sem eru margfeldi af r.

Sannið að ef til eru óendanlega margar góðar tölur þá hljóti $10^k - 1$ líka að vera góð tala.

20. Látum a og b vera jákvæðar heiltölur, $b < a$, þannig að $a^3 + b^3 + ab$ sé deilanleg með $ab(a-b)$. Sannið að ab er teningstala (þriðja veldi af heilli tölu).