Baltic Way 2007
Kopenhagen, 3. November 2007

Version: Deutsch

Arbeitszeit: 4 1/2 Stunden.
Während der ersten 30 Minuten können Fragen gestellt werden.
Als Arbeitsmittel sind nur Schreib- und Zeichenutensilien erlaubt

1. Betrachte für eine positive ganze Zahl n beliebige Zerlegungen der Menge $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ in n zweielementige Teilmengen $P_1, P_2, \ldots, P_n$. In jeder Teilmenge P_i sei p_i das Produkt der beiden Zahlen in P_i. Beweise:

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \cdots + \frac{1}{p_n} < 1.$$

2. Eine Folge a_1, a_2, a_3, … von ganzen Zahlen möge *exakt* heißen, wenn für jedes $n > m$ die Gleichung $a_n^2 - a_m^2 = a_{n-m}a_{n+m}$ gilt.

Beweise, dass es eine exakte Folge mit $a_1 = 1$ und $a_2 = 0$ gibt, und bestimme a_{2007}.

3. Es seien F, G und H Polynome vom Grad höchstens $2n + 1$ mit reellen Koeffizienten, die folgende Bedingungen erfüllen:

(1) Für alle reellen Zahlen x gilt:

$$F(x) \leq G(x) \leq H(x).$$

(2) Es existieren voneinander verschiedene reelle Zahlen x_1, x_2, …, x_n mit

$$F(x_i) = H(x_i) \qquad \text{für } i = 1, 2, \ldots, n.$$

(3) Es existiert eine reelle Zahl x_0, verschieden von x_1, x_2, …, x_n, mit

$$F(x_0) + H(x_0) = 2\,G(x_0).$$

Beweise: $F(x) + H(x) = 2\,G(x)$ gilt dann für alle reellen Zahlen x.

4. Es seien a_1, a_2, …, a_n positive reelle Zahlen und $S = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. Beweise:

$$(2S + n)(2S + a_1a_2 + a_2a_3 + \cdots + a_na_1) \geq 9\left(\sqrt{a_1a_2} + \sqrt{a_2a_3} + \cdots + \sqrt{a_na_1}\right)^2.$$

5. Eine Funktion f ist definiert auf der Menge aller reellen Zahlen außer 0, und sie nimmt als Werte alle reellen Zahlen außer 1 an. Weiterhin ist bekannt:

$$f(xy) = f(x)f(-y) - f(x) + f(y)$$

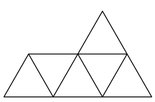
für alle $x, y \neq 0$ sowie

$$f(f(x)) = \frac{1}{f(\frac{1}{x})}$$

für alle $x \notin \{0, 1\}$. Bestimme alle solche Funktionen f.

6. Freddy schreibt die Zahlen $1, 2, \ldots, n$ in irgend einer Reihenfolge hin. Dann fertigt er eine Liste der Paare (i, j) an, bei denen $1 \leq i < j \leq n$ gilt und in seiner Permutation die i-te Zahl größer als die j-te Zahl ist. Danach wiederholt Freddy die folgende Operation, solange diese möglich ist: Er wählt ein Paar (i, j) aus der aktuellen Liste, tauscht die i-te und die j-te Zahl in der aktuellen Permutation und streicht das Paar (i, j) aus der Liste. Beweise, dass Freddy die Paare in einer solchen Reihenfolge abarbeiten kann, dass am Ende die Zahlen in der Permutation aufsteigend geordnet sind.

7. Ein *Squiggel* besteht aus sechs gleichseitigen Dreiecken mit der Seitenlänge 1, s. Abbildung. Bestimme alle ganzen Zahlen n, für die ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge n vollständig mit Squiggels überdeckt werden kann, wobei Rotationen und Spiegelungen von Squiggels erlaubt sind, sie dürfen sich aber nicht überlappen.



8. Eine Menge A von ganzen Zahlen heiße *nicht-isoliert*, wenn für jedes $a \in A$ mindestens eine der Zahlen $a-1$ oder $a+1$ auch zu A gehört. Beweise, dass die Anzahl der fünfelementigen nicht-isolierten Teilmengen von $\{1, 2, \ldots, n\}$ den Wert $(n-4)^2$ hat.

9. Ein Verein hat seinen Vorstand zu wählen. Jedes Vereinsmitglied kann 10 Kandidaten für den Vorstand vorschlagen; es ist aber schon glücklich, wenn mindestens einer seiner Kandidaten in den Vorstand gewählt wird. Weiterhin ist bekannt, dass für beliebige sechs Vereinsmitglieder jeweils zwei Kandidaten existieren, die zusammengenommen alle sechs glücklich machen würden. Beweise: Der Verein kann einen Vorstand aus 10 Personen wählen, der jedes Mitglied glücklich machen wird.

10. Jede Zelle eines 18×18-Feldes ist entweder schwarz oder weiss gefärbt. Zu Beginn sind alle Zellen weiss. Zum Umfärben gibt es die folgende Operation: Es wird eine Zeile oder Spalte ausgewählt, und in ihr werden alle Zellen umgefärbt. Kann man durch wiederholte Anwendung dieser Operation ein Feld mit genau 16 schwarzen Zellen erreichen?

11. Im Dreieck ABC seien AD, BE und CF die Höhen. Die Punkte P, Q, R und S mögen die folgenden Bedingungen erfüllen:

(1) P ist der Umkreismittelpunkt des Dreiecks ABC.

(2) Die Längen der drei Strecken PQ, QR und RS sind jeweils gleich dem Umkreisradius des Dreiecks ABC.

(3) Die gerichtete Strecke PQ hat die gleiche Richtung wie die gerichtete Strecke AD. Entsprechend hat QR die gleiche Richtung wie BE und RS hat die gleiche Richtung wie CF.

Beweise: S ist der Inkreismittelpunkt des Dreiecks ABC.

12. Es sei M ein Punkt auf demjenigen Bogen $\widehat{AB}$ des Umkreises des Dreiecks ABC, der C nicht enthält. Die Projektionen von M auf die Gerade AB und BC mögen auf den Dreiecksseiten liegen (nicht außerhalb) und mit X und Y bezeichnet sein. Es seien K und N die Mittelpunkte von AC bzw. XY. Beweise: $\sphericalangle MNK = 90°$.

13. Es seien $t_1, t_2, \ldots, t_k$ verschiedene Geraden im Raum mit $k > 1$. Beweise, dass Punkte P_i auf t_i, $i = 1, \ldots, k$, existieren, so dass P_{i+1} die Projektion von P_i auf t_{i+1} für $i = 1, \ldots, k-1$, und P_1 die Projektion von P_k auf t_1 ist.

14. Ein konvexes Viereck $ABCD$ hat einen rechten Winkel in D. Es seien E und F die Projektionen von B auf die Geraden AD bzw. AC. Weiterhin soll F zwischen A und C liegen, A zwischen D und E, und die Gerade EF soll durch den Mittelpunkt der Strecke BD gehen. Beweise, dass das Viereck $ABCD$ ein Sehnenviereck ist.

15. Der Inkreis des Dreiecks ABC berührt die Seite AC im Punkt D. Ein anderer Kreis durch D berührt die Strahlen BC und BA, den letzteren im Punkt A. Bestimme des Verhältnis AD/DC.

16. Es seien a und b rationale Zahlen mit $s = a + b = a^2 + b^2$. Beweise, dass es für s eine Bruchdarstellung gibt, bei der der Nenner teilerfremd zu 6 ist.

17. Es seien x, y, z positive ganze Zahlen, so dass $\frac{x+1}{y} + \frac{y+1}{z} + \frac{z+1}{x}$ ganzzahlig ist. Es sei d der größte gemeinsame Teiler von x, y und z. Beweise: $d \leq \sqrt[3]{xy + yz + zx}$.

18. Es seien a, b, c, d ganze Zahlen, von denen keine Null ist. Für sie gilt: Das einzige ganzzahlige Quadrupel (x, y, z, t), das die Gleichung

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2 = 0$$

löst, ist $x = y = z = t = 0$. Folgt daraus, dass die Zahlen a, b, c und d dasselbe Vorzeichen haben?

19. Es seien r und k positive ganze Zahlen, und alle Primfaktoren von r seien größer als 50. Eine positive ganze Zahl, deren Dezimaldarstellung (ohne führende Nullen) mindestens k Ziffern hat, möge *merkwürdig* heißen, wenn jede Folge von k aufeinander folgenden Ziffern ihrer Dezimaldarstellung jeweils eine Zahl bildet (eventuell mit führenden Nullen), die ein Vielfaches von r ist. Beweise: Wenn es unendlich viele merkwürdige Zahlen gibt, dann ist die Zahl $10^k - 1$ ebenfalls merkwürdig.

20. Es seien a und b positive ganze Zahlen ($b < a$), so dass $a^3 + b^3 + ab$ teilbar durch $ab(a-b)$ ist. Beweise, dass ab eine Kubikzahl ist.