Baltic Way 2007

Copenhagen, November 3, 2007

Version: Estonian

Lahendamisaega on 4 tundi 30 minutit.
Selgitusi ülesannete tekstide kohta antakse esimese 30 minuti jooksul.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Olgu n positiivne täisarv ning arvud $1, 2, \ldots, 2n$ jagatud paarideks $P_1, P_2, \ldots, P_n$. Iga paari P_i jaoks olgu p_i mõlema paarilise korrutis. Tõesta, et

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \cdots + \frac{1}{p_n} < 1.$$

2. Nimetame täisarvude jada $a_1, a_2, a_3, \ldots$ *täpseks*, kui $a_n^2 - a_m^2 = a_{n-m}a_{n+m}$ mistahes $n > m$ korral. Tõesta, et leidub selline täpne jada, et $a_1 = 1$ ja $a_2 = 0$, ning leia a_{2007}.

3. Olgu F, G ja H reaalarvuliste kordajatega ülimalt $2n + 1$ astme polünoomid, mis rahuldavad järgmisi tingimusi.

(1) Iga reaalarvu x korral $F(x) \leq G(x) \leq H(x)$.
(2) Leiduvad paarikaupa erinevad reaalarvud x_1, x_2, …, x_n, nii et $F(x_i) = H(x_i)$ iga $i = 1, 2, \ldots, n$ korral.
(3) Leidub arvudest x_1, x_2, …, x_n erinev reaalarv x_0, nii et $F(x_0) + H(x_0) = 2G(x_0)$.

Tõesta, et võrdus $F(x) + H(x) = 2G(x)$ kehtib iga reaalarvu x korral.

4. Olgu a_1, a_2, …, a_n positiivsed reaalarvud ning $S = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. Tõesta, et

$$(2S + n)(2S + a_1a_2 + a_2a_3 + \ldots + a_na_1) \geq 9\Big(\sqrt{a_1a_2} + \sqrt{a_2a_3} + \ldots + \sqrt{a_na_1}\Big)^2.$$

5. Funktsioon f on määratud kõigil reaalarvudel välja arvatud 0 ning ta saavutab kõik reaalarvulised väärtused välja arvatud 1. Mistahes $x, y \neq 0$ korral kehtib

$$f(xy) = f(x)f(-y) - f(x) + f(y)$$

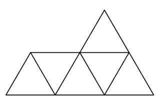
ning mistahes $x \notin \{0, 1\}$ korral on

$$f(f(x)) = \frac{1}{f(\frac{1}{x})}$$

Leia kõik sellised funktsioonid f.

6. Juku kirjutas tahvlile arvujärjendi, milles on mingis järjekorras arvud $1, 2, \ldots, n$. Seejärel koostas ta nimekirja kõigist paaridest (i, j), kus $1 \leq i < j \leq n$, kuid järjendi i-s arv on j-ndast suurem. Edasi järgib Juku järgmist tegevusjuhist, seni kuni võimalik: valida nimekirjast paar (i, j), vahetada tahvlil olevas järjendis i-s ja j-s arv ning kustutada paar (i, j) nimekirjast. Tõesta, et Juku saab paare valida sellises järjekorras, et pärast protsessi lõppu on tahvlil olev järjend kasvav.

7. Nimetame *krõnksuks* joonisel näidatud kujundit, mis koosneb kuuest võrdkülgsest kolmnurgast küljepikkusega 1. Võrdkülgne kolmnurk küljepikkusega n on tükeldatud krõnksudeks. Leia täisarvu n kõik võimalikud väärtused. (Krõnksu võib pöörata ja peegeldada).



8. Nimetame täisarvudest koosnevat hulka A *sõbralikuks*, kui mistahes $a \in A$ korral kuulub vähemalt üks arvudest $a - 1$ ja $a + 1$ samuti hulka A. Tõesta, et hulgal $\{1, 2, \ldots, n\}$ on $(n - 4)^2$ viieelementidilist sõbralikku alamhulka.

9. Nõukogu valib juhatust. Igal nõukogu liikmel on 10 lemmikkandidaati ning ta on rahul, kui vähemalt üks nendest pääseb juhatusse. Nõukogu mistahes kuue liikme jaoks leidub kaheliikmeline juhatus, millega kõik kuus on rahul. Tõesta, et saab valida kümneliikmelise juhatuse, millega jäävad rahule kõik nõukogu liikmed.

10. Tabelis on 18 rida ja 18 veergu ning selle iga ruut saab olla kas must või valge. Algul on kõik ruudud valged. Igal sammul on lubatud valida üks rida või üks veerg ning vahetada värv kõikidel ruutudel, mis asuvad valitud reas või veerus. Kas on võimalik saavutada olukord, kus tabelis on täpselt 16 musta ruutu?

11. Olgu AD, BE ja CF kolmnurga ABC kõrgused. Punktid P, Q, R ja S rahuldavad järgmisi tingimusi.

(1) Punkt P on kolmnurga ABC ümberringjoone keskpunkt.
(2) Lõikude PQ, QR ja RS pikkus on võrdne ümberringjoone raadiusega.
(3) Vektorid $\overrightarrow{PQ}$ ja $\overrightarrow{AD}$ on samasuunalised. Analoogiliselt ka $\overrightarrow{QR} \upuparrows \overrightarrow{BE}$ ja $\overrightarrow{RS} \upuparrows \overrightarrow{CF}$.

Tõesta, et S on kolmnurga ABC siseringjoone keskpunkt.

12. Kolmnurga ABC ümberringjoonel on valitud punkt M, mis asub punktide A ja B vahel. Punktist M on tõmmatud sirgetele AB ja BC vastavalt ristlõigud MX ja MY, kusjuures punktid X ja Y asuvad kolmnurga külgedel, mitte nende pikendustel. Olgu K ja N vastavalt lõikude AC ja XY keskpunktid. Tõesta, et $\angle MNK = 90°$.

13. Olgu $k > 1$ ning $t_1, t_2, \ldots, t_k$ erinevad sirged ruumis. Tõesta, et neil saab valida vastavalt punktid $P_1, P_2, \ldots, P_k$ nii, et punkt P_{i+1} on punkti P_i projektsioon sirgele t_{i+1} $(i = 1, 2, \ldots, k-1)$ ning punkt P_1 on punkti P_k projektsioon sirgele t_1.

14. Olgu kumera nelinurga $ABCD$ nurk D täisnurk. Punktist B on tõmmatud sirgetele AD ja AC vastavalt ristlõigud BE ja BF, kusjuures punkt F asub punktide A ja C vahel ning punkt A asub punktide D ja E vahel. Sirge EF läbib lõigu BD keskpunkti. Tõesta, et $ABCD$ on kõõlnelinurk.

15. Kolmnurga ABC siseringjoon puutub külge AC punktis D. Teine ringjoon läbi punkti D puutub kiirt BA punktis A ning lisaks puutub kiirt BC. Leia suhe AD/DC.

16. Olgu s, a ja b sellised ratsionaalarvud, et $s = a + b = a^2 + b^2$. Tõesta, et s võib esitada hariliku murruna, mille nimetaja on arvuga 6 ühistegurita.

17. Olgu x, y ja z sellised naturaalarvud, et $\frac{x+1}{y} + \frac{y+1}{z} + \frac{z+1}{x}$ on täisarv. Olgu d arvude x, y ja z suurim ühistegur. Tõesta, et $d \leq \sqrt[3]{xy + yz + zx}$.

18. Olgu a, b, c ja d sellised nullist erinevad täisarvud, et võrrandi $ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2 = 0$ ainus täisarvuline lahend on $x = y = z = t = 0$. Kas sellest järeldub, et a, b, c ja d on kõik samamärgilised?

19. Olgu r ja k, positiivsed täisarvud ning arvu r kõik algtegurid suuremad arvust 50.

Nimetame positiivset täisarvu *ilusaks*, kui selle kümnendesitus (mis ei alga numbriga 0) sisaldab vähemalt k numbrit ning selle esituse mistahes k järjestikust numbrit moodustab r-ga jaguva (võibolla nullidega algava) arvu.

Tõesta, et kui ilusaid arve on lõpmata palju, siis ka arv $10^k - 1$ on ilus.

20. Olgu a ja b sellised positiivsed täisarvud, et $b < a$ ning $a^3 + b^3 + ab$ jagub arvuga $ab(a - b)$. Tõesta, et ab on mingi täisarvu kuup.