Baltic Way 2007

København, den 3. november 2007

Version: Dansk

Varighed: 4½ timer.
Spørgmål kan stilles i løbet af de første 30 minutter.
Tegne- og skriveredskaber er eneste tilladte hjælpemidler.

1. Betragt, for et positivt heltal n, en partition af mængden $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ i n delmængder $P_1, P_2, \ldots, P_n$ af to elementer hver. I enhver delmængde P_i, lad p_i betegne produktet af de to tal i P_i. Bevis at

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \cdots + \frac{1}{p_n} < 1.$$

2. En følge af heltal a_1, a_2, a_3, ... kaldes *eksakt* hvis $a_n^2 - a_m^2 = a_{n-m}a_{n+m}$ for alle $n > m$. Bevis at der findes en eksakt følge med $a_1 = 1$, $a_2 = 0$, og bestem a_{2007}.

3. Antag at F, G, H er polynomier af grad højst $2n + 1$ med reelle koefficienter sådan at:

(1) For alle reelle x har vi

$$F(x) \leq G(x) \leq H(x).$$

(2) Der findes forskellige reelle tal x_1, x_2, ..., x_n sådan at

$$F(x_i) = H(x_i) \qquad \text{for } i = 1, 2, \ldots, n.$$

(3) Der findes et reelt tal x_0 forskelligt fra x_1, x_2, ..., x_n sådan at

$$F(x_0) + H(x_0) = 2G(x_0).$$

Bevis at $F(x) + H(x) = 2G(x)$ for alle reelle tal x.

4. Lad a_1, a_2, ..., a_n være positive reelle tal, og lad $S = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. Bevis at

$$(2S + n)(2S + a_1a_2 + a_2a_3 + \cdots + a_na_1) \geq 9\left(\sqrt{a_1a_2} + \sqrt{a_2a_3} + \cdots + \sqrt{a_na_1}\right)^2.$$

5. En funktion f er defineret på mængden af alle reelle tal undtagen 0 og antager alle reelle værdier bortset fra 1. Det vides også at

$$f(xy) = f(x)f(-y) - f(x) + f(y)$$

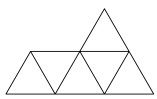
for alle $x, y \neq 0$, og at

$$f(f(x)) = \frac{1}{f(\frac{1}{x})}$$

for ethvert $x \notin \{0, 1\}$. Bestem alle sådanne funktioner f.

6. Frederik skriver tallene $1, 2, \ldots, n$ ned i tilfældig rækkefølge. Derefter laver han en liste over alle par (i, j) hvor $1 \leq i < j \leq n$ og hvor det i'te tal er større end det j'te tal i hans permutation. Herefter gentager Frederik den følgende handling så mange gange han kan: vælg et par (i, j) fra den nuværende liste, ombyt det i'te og det j'te tal i den nuværende permutation, og slet (i, j) fra listen. Bevis at Frederik kan vælge talpar i en sådan rækkefølge at tallene i permutationen, efter processens afslutning, er ordnet voksende.

7. En *gnyf* er sammensat af seks regulære trekanter med sidelængde 1 som vist på figuren nedenfor. Bestem alle heltal n således at en regulær trekant med sidelængde n kan deles op i gnyffer (det er tilladt at rotere og spejle gnyffer).



8. Kald en mængde A af heltal *ikke-isoleret*, hvis der for alle $a \in A$ gælder at mindst et af tallene $a-1$ og $a+1$ også tilhører A. Bevis at antallet af ikke-isolerede delmængder af $\{1, 2, \ldots, n\}$ med 5 elementer er $(n-4)^2$.

9. En forening skal vælge en komité af ledere. Hvert medlem af foreningen har valgt 10 kandidater til komitéen, men vil være glad så længe mindst én af dem kommer med i komitéen. For hver gruppe af seks medlemmer af foreningen eksisterer der en komité bestående af to personer som gør alle disse seks personer glade. Bevis at der kan vælges en komité bestående at 10 personer således at alle foreningens medlemmer er glade.

10. Vi betragter et 18×18-skema hvor hver celle enten kan være sort eller hvid. Til at starte med er alle celler farvet hvide. Følgende handling må udføres: vælg en søjle eller en række, og ændr farven på alle celler i denne søjle eller række. Er det muligt, ved gentagen brug af denne handling, at opnå et skema med præcis 16 sorte celler?

11. Lad AD, BE og CF være højderne i trekant ABC, og lad punkterne P, Q, R og S opfylde følgende krav:

(1) P er centrum i trekant ABCs omskrevne cirkel.

(2) Alle længderne $|PQ|$, $|QR|$ og $|RS|$ er lig radius i trekant ABCs omskrevne cirkel.

(3) Det orienterede linjestykke PQ har samme retning som det orienterede linjestykke AD. Tilsvarende har QR samme retning som BE, og RS har samme retning som CF.

Bevis at S er centrum i trekant ABCs indskrevne cirkel.

12. Lad M være et punkt på det buestykke $\widehat{AB}$ af den omskrevne cirkel for trekant ABC der ikke indeholder C. Antag at projektionerne af M på linjerne AB og BC ligger på selve linjestykkerne og ikke på deres forlængelser. Kald disse projektioner henholdsvis X og Y. Lad K og N være midtpunkterne af henholdsvis AC og XY. Bevis at $\angle MNK = 90°$.

13. Lad $t_1, t_2, \ldots, t_k$ være forskellige rette linjer i rummet, hvor $k > 1$. Bevis at der findes punkter P_i på t_i, $i = 1, \ldots, k$, sådan at P_{i+1} er projektionen af P_i på t_{i+1} for $i = 1, \ldots, k-1$, og P_1 er projektionen af P_k på t_1.

14. I en konveks firkant $ABCD$ har vi at $\angle ADC = 90°$. Lad E og F være projektionerne af B på henholdsvis linjen AD og linjen AC. Antag at F ligger mellem A og C, at A ligger mellem D og E, og at linjen EF går gennem midtpunktet af linjestykket BD. Bevis at firkanten $ABCD$ er indskrivelig.

15. Den indskrevne cirkel for trekant ABC rører siden AC i punktet D. En anden cirkel går gennem D og rører halvlinjerne BC og BA, sidstnævnte i punktet A. Bestem forholdet $|AD|/|DC|$.

16. Lad a og b være rationale tal sådan at $s = a + b = a^2 + b^2$. Bevis at s kan skrives som en brøk hvor nævneren er indbyrdes primisk med 6.

17. Lad x, y, z være positive heltal sådan at $\frac{x+1}{y} + \frac{y+1}{z} + \frac{z+1}{x}$ er et heltal. Lad d være den største fælles divisor af x, y og z. Bevis at $d \leq \sqrt[3]{xy + yz + zx}$.

18. Lad a, b, c, d være heltal forskellige fra 0, sådan at det eneste kvadrupel af heltal (x, y, z, t) der opfylder ligningen

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2 = 0$$

er $x = y = z = t = 0$. Følger det da at tallene a, b, c, d har samme fortegn?

19. Lad r og k være positive heltal sådan at alle primdivisorer i r er større end 50.

Et positivt heltal, hvis decimalrepræsentation (uden indledende nuller) har mindst k cifre, kaldes *muntert* hvis enhver sekvens af k på hinanden følgende cifre af denne decimalrepræsentation danner et tal (muligvis med indledende nuller) der er et multiplum af r.

Bevis at hvis der findes uendeligt mange muntre tal, så er tallet $10^k - 1$ også muntert.

20. Lad a og b være positive heltal, $b < a$, sådan at $a^3 + b^3 + ab$ er deleligt med $ab(a-b)$. Bevis at ab er et kubiktal.